

广东工业大学

2019 年博士学位研究生招生考试试题

考试科目 (代码) 名称: (2002) 线性代数

满分 100 分

(考生注意: 答卷封面需填写自己的准考证编号, 答完后连同本试题一并交回!)

一 (15 分)、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 及其伴随矩阵 A^* 满足方程 $AXA^* = 2XA^{-1} + E$, 其中 E

是三阶单位矩阵. 求 X .

二 (15 分)、设有线性方程组

$$\begin{cases} mx - 2y - z = 1, \\ 2x + y + z = n, \\ 10x + 5y + 4z = -1, \end{cases}$$

问为 m, n 何值时, 此方程组 (1) 有惟一解; (2) 无解; (3) 有无限多解, 并在有无限多解时求其通解.

三 (15 分)、已知向量组 $A: \alpha_1 = (1, -2, 3)^T, \alpha_2 = (3, 0, 1)^T, \alpha_3 = (9, 6, -7)^T$ 与向量组

$B: \beta_1 = (0, 1, -1)^T, \beta_2 = (a, 2, 1)^T, \beta_3 = (b, 1, 0)^T$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

四 (15 分)、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax = x_1^2 + ax_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的矩阵 A 与对角阵

$\Lambda = \text{diag}(-1, 1, b)$ 相似.

(1) 试求 a, b 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形, 并写出正交变换矩阵.

五 (10 分)、设 $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 且 $A_k = s - a_k (k = 1, 2, \dots, n)$. 计算

$$D = \begin{vmatrix} x - A_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x - A_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x - A_n \end{vmatrix}$$

六 (10 分)、设 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵, O 是 n 阶零矩阵, 且 $(A + E)^2 = O$. 证

明方阵 A 可逆并求其逆矩阵.

七 (10 分)、设 A 是 n 阶实反对称矩阵 ($A^T = -A$), E 是 n 阶单位矩阵. 证明

(1) A 的特征值是零或纯虚数;

(2) $E - A^2$ 为正定矩阵.

八 (10 分)、设向量组 $A: a_1, a_2, a_3$ 线性无关, 向量 b_1 能由向量组 A 线性表示, 向量 b_2 不能由向量组 A 线性表示, λ 为任意常数, 问:

(1) 向量组 $a_1, a_2, a_3, \lambda b_1 + b_2$ 是否线性相关, 为什么?

(2) 向量组 $a_1, a_2, a_3, b_1 + \lambda b_2$ 是否线性相关, 为什么?