

广东工业大学

2019 年博士学位研究生招生考试试题

考试科目（代码）名称：(2006)矩阵分析

满分 100 分

(考生注意：答卷封面需填写自己的准考证编号，答完后连同本试题一并交回！)

一、选择题（每题 5 分，共 25 分）：

1、设 D 是线性空间 $R[x]_4$ 上的线性变换，且 $D(f(x)) = f'(x)$ ，则 D 的核子空间的维数 $\dim N(D) = (\quad)$ 。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2、设 Hermite 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -ix_1\overline{x_2} - x_1\overline{x_3} + ix_2\overline{x_1} - x_3\overline{x_1}$ ，则其对应的 Hermite 矩阵是 ()。

A. $\begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 0 & -i & -1 \\ i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3、下列关于正规矩阵的说法错误的是 ()。

- A. 正规矩阵可以酉对角化。
- B. 与正规矩阵酉相似的矩阵还是正规矩阵。
- C. 正规矩阵有 n 个线性无关的特征向量。
- D. 正规矩阵是 Hermite 矩阵。

4、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，则 A 的 Frobenius 范数是 ()。

A. 1 B. 3 C. 4 D. 6

5、已知 A^+ 是矩阵 A 的伪逆矩阵，则下列说法错误的是 ()。

- A. $AA^+ = A$ B. $A^+AA^+ = A^+$
- C. $(A^+)^+ = A$ D. $(AA^+)^H = AA^+$

二、计算题（1~5 题每题 10 分，第 6 题 15 分，共 65 分）

1、求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 的满秩分解。

2、设数字矩阵 A 的初等因子为 $\lambda, \lambda, (\lambda-1), (\lambda+1), (\lambda+1)^2, (\lambda-2)$ ，求 A 的阶

数, A 的不变因子和 Smith 标准形。

3、求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的最小多项式。

4、试判断矩阵序列 A^k 的敛散性, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ 。

5、设矩阵 $A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$, 求 $\frac{d}{dt} A^{-1}(t)$ 。

6、设 σ 是 3 维向量空间 \mathbb{R}^3 上的线性变换, 且将基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 映到

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 即 $\sigma(\alpha_i) = \beta_i$, 其中

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求 (1) σ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵表示。

(2) σ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的特征值。

三、证明题 (10 分): 设矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 试证: A 的特征值只能是 0 或 1。