广东工业大学

2019年硕士学位研究生招生考试试题

考试科目（代码）名称：(846)高等代数　　满分150分

（考生注意：答卷封面需填写自己的准考证编号，答完后连同本试题一并交回！）

一、填空题(每小题6分，共60分)

1. 在5阶行列式中，$a_{55}a_{23}a_{42}a_{31}a_{14}$ 的符号是________.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$________.

3. 设A为4阶方阵，$|A|=2$，则行列式 $|(2A)^{-1}-A^*|=$_____，其中A^*表示A的伴随矩阵.

4. 若$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$是$n$个不同实数，那么$e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},\cdots,e^{\lambda_n x}$是线性_____（相、无）关.

5. 已知向量$\alpha=(1,2)^T$，$\beta=(1,\dfrac{1}{2})^T$. 记$A=\alpha\beta^T$，则$A^{11}=$________.

6. 若线性方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+ax_3=1 \\ 2x_1+6x_2-8x_3=1 \end{cases}$无解，则常数$a=$________.

7. 实数域上所有n阶反对称矩阵组成_____维线性空间.

8. 如果m阶矩阵A和n阶矩阵B都可逆，那么逆$\begin{pmatrix} o & A \\ B & o \end{pmatrix}^{-1}=$________.

9. n阶矩阵A的秩是r，n阶矩阵B的秩是s，0是零矩阵, 那么$2n$矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ o & B \end{pmatrix}$的秩是________.

10. 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的初等因子是________.

二(10 分)、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 设 $AX-2A+E=0$，E为单位矩阵，求 X.

三(14 分)、当 λ 为何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{4} \\ x_1-2x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2 \end{cases}$ 有解，并求其通解.

四(10 分)、 $R[x]_4$ 是实数域 R 上次数不超过3的多项式全体，已知线性变换

$$\mathrm{T}(f(x))=\frac{df(x)}{dx}, f(x)\in R[x]_4,$$

求线性变换T在基 $1, x-3, (x-3)^2, (x-3)^3$ 下的矩阵表示.

五(12 分)、设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & & & \cdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量.

六(10 分)、设 n 维线性空间 V 的一个线性变换 Π 有 n 个不同的特征值，证明 Π 共有 2^n 个不变子空间(包括零子空间和整个空间 V).

七(12 分)、证明下列关于矩阵秩的不等式：

1. 秩 $(\mathrm{A}_{m\times n}+\mathrm{B}_{m\times n})\leq$ 秩 $\mathrm{A}_{m\times n}+$ 秩 $\mathrm{B}_{m\times n}$；

2. $A_{m\times n}B_{n\times l}=O_{m\times l}$，其中 $O_{m\times l}$ 表示零矩阵，证明：秩 $A+$ 秩 $B\leq n$.

八(10 分)、已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=2A$. 证明：A 可以对角化.

九(12 分)、利用正交变换将二次型 $f=3x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3+3x_3^2$ 化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵.