广东工业大学

2020年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目（代码）名称：(846)高等代数　　满分150分

（考生注意：试卷封面需填写自己的准考证编号，答完后连同本试题一并交回！）

一（共60分，每题6分）填空题：

（1）若$a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$成为5阶行列式中一个带负号的项，则$k=$____.

（2）设$f(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx-2$。如果$f(x)$被$(x-1)^2$整除，则$a=$____，$b=$____.

（3）在线性空间F^3中，向量$\alpha=(1,3,0)$在基$\varepsilon_1=(2,2,2)$，$\varepsilon_2=(-1,3,0)$，$\varepsilon_3=(2,0,3)$下的坐标是____.

（4）设2×2阶矩阵X满足方程$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -6 & -4\end{bmatrix}$，则$X=$____.

（5）设$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$。则$A^{-1}=$____.

（6）若二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3+x_4^2$是正定的，则$\lambda$的取值范围是____.

（7）若$T(x_1,x_2,x_3)=(0,x_3,0)$是F^3上的一个线性变换，则$T^{-1}(\theta)$的一组基为____，其中θ是F^3中的零向量。

（8）设三维线性空间V上的线性变换$\mathcal{A}$在基ε_1，ε_2，ε_2下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$，则$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$下的矩阵为____.

（9）若三阶方阵A的特征值为0, 3, 4，则矩阵$B=E+2A+A^2+A^*$的特征值为____.

（10）在欧式空间R^4中（内积按通常定义），向量$\alpha=(1,2,2,3)$和$\beta=(1,2,2,3)$之间的夹角$<\alpha,\beta>=$____.

二（10分）计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & 18 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 13 \\ 1 & 4 & 9 & -3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$。

三（15分）已知方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$，问$a$，$b$取何值时，此方程组

（1）无解；（2）有无穷多解？并在无穷多解时求出其通解。

四（15 分）已知P^3中线性变换$\mathcal{A}$在基$\mu_1=(-1,1,1)$，$\mu_2=(1,0,-1)$，$\mu_3=(0,1,1)$下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

求$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$下的矩阵。

五（20分）已知$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，

（1）求A的所有特征值以及对应的特征向量；

（2）求一可逆矩阵T，使得$T^{-1}AT$是一个对角矩阵；

（3）求A^k，其中k为自然数。

六（15分）利用非退化线性替换化二次型$x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$为标准形，并用矩阵验算所得结果。

七（15分）设ε_1，ε_2，ε_3，ε_4，ε_5是五维欧氏空间V的一组标准正交基，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5$，$\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4$，$\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，求$V_1$的一组标准正交基。